Soluciones a los ejercicios

PROBLEMA 1:
Sea la gramática $G = \{V, T, S, P\}$, donde $V = \{a, b, A, A, B, S\}$, $T = \{a, b\}$, S es el símbolo inicial y $P = \{S ::= ABa, A ::= BB, B ::= ab, AB ::= b\}$. ¿Se deriva la cadena $Aaba$ de ABa?, ¿cómo?, ¿y la cadena $abababa$?

SOLUCIÓN.

Efectivamente la cadena $Aaba$ se deriva directamente de ABa en dicha gramática, puesto que $B ::= ab$ es una producción de dicha gramática. La cadena $abababa$ se deriva de ABa, puesto que $ABa \Rightarrow Aaba \Rightarrow BBaba \Rightarrow Bababa \Rightarrow bababa$ usando las producciones $B ::= ab$, $A ::= BB$, $B ::= ab$ y $B ::= ab$ sucesivamente.

PROBLEMA 2:
Sea la gramática con vocabulario $V = \{S,\ A,\ a,\ b\}$, conjunto terminales $T = \{a,\ b\}$, símbolo inicial S y las producciones $P = \{S ::= aA,\ S ::= b,\ A ::= aa\}$. ¿Cuál es el lenguaje $L(G)$ generado por esta gramática?

SOLUCIÓN.

A partir del estado inicial S, se puede derivar aA utilizando la producción $S ::= aA$. También se puede usar la producción $S ::= b$ para derivar b. De aA, mediante la producción $A ::= aa$ se deriva aaa. Puesto que no puede derivarse ninguna otra palabra utilizando las producciones, se tiene que $L(G) = \{b,\ aaa\}$

PROBLEMA 3:
Determina si la palabra $cbab$ pertenece o no al lenguaje generado por la gramática $G = \{V, T, S, P\}$, donde $V = \{a, b, c, A, B, C, S\}$, el subconjunto terminal es $T = \{a, b, c\}$, S es el símbolo inicial y las producciones $S ::= AB$, $A ::= Ca$, $B ::= Ba$, $B ::= Cb$, $B ::= b$, $C ::= cb$ y $C ::= b$.

SOLUCIÓN.

Hay dos maneras de solucionar este problema. La primera utilizando una estrategia de análisis descendente y otra con un análisis ascendente. Utilizando la primera podemos partir del símbolo inicial y utilizar las producciones hasta llegar a $cbab$. De este modo $S \Rightarrow AB$ y usar la producción $A ::= Ca$ para obtener $S \Rightarrow AB \Rightarrow CaB \Rightarrow cbaB$. Puesto que $cbab$ comienza por cb utilizamos la producción $C ::= cb$. Esto da lugar a $A ::= Ca$ para obtener $S \Rightarrow AB \Rightarrow CaB \Rightarrow cbaB \Rightarrow cbab$. También se podría haber partido de $cbab$ y usar producciones en hasta llegar a S (análisis ascendente).

PROBLEMA 4:
Determina si las palabras de la lista de abajo pertenecen o no al lenguaje generado por la gramática $G = \{V, T, S, P\}$, donde $V = \{a, b, c, A, B, C, S\}$, el subconjunto terminal es $T = \{a, b, c\}$, S es el símbolo inicial y las producciones $S ::= AB$, $A ::= Ca$, $B ::= Ba$, $B ::= Cb$, $B ::= b$, $C ::= cb$ y $C ::= b$.

$$a)\ baba \quad b)\ abab \quad c)\ cbaba \quad d)\ bbbcba$$

Solución.

Sí, No, Sí, No.

PROBLEMA 5:
¿Qué conjunto genera la gramática $G = \{V, T, S, P\}$ en donde $V = \{0, 1, S\}$, $T = \{0, 1\}$ y S es el símbolo inicial? Las producciones son $S ::= 0S1$ y $S ::= \lambda$.

Notación: Podemos denotar un conjunto $C = \{0^n 1^n | n = 0, 1, 2, ...\}$ como el conjunto de cadenas del tipo 000..,111... en donde hay n ceros seguidos de n unos.

Solución.

Será precisamente $C = \{0^n 1^n | n = 0, 1, 2, ...\}$

PROBLEMA 6:
¿Qué conjunto genera la gramática $G = \{V, T, S, P\}$ en donde $V = \{0, 1, S\}$, $T = \{0, 1\}$ y S es el símbolo inicial? Las producciones son $S ::= 0S$, $S ::= S1$ y $S ::= \lambda$.

Solución.

El conjunto pedido es $\{0^m 1^n |\ m$ y n enteros no negativos$\}$

PROBLEMA 7:
¿Qué conjunto genera la gramática $G = \{V, T, S, P\}$ en donde $V = \{0, A, 1, S\}$, $T = \{0, 1\}$ y S es el símbolo inicial? Las producciones son $S ::= 0S$, $S ::= 1$ $S ::= 1$, $A ::= 1A$, $A ::= 1$, y $S ::= \lambda$.

Solución.

El conjunto pedido es $\{0^m 1^n |\ m$ y n enteros no negativos$\}$

PROBLEMA 8:
decir si la gramática $G = \{V, T, S, P\}$ en donde $V = \{S, A, B, a, b\}$, $T = \{a, b\}$ es una gramática de tipo 0, pero no de tipo 1; de tipo 1, pero no de tipo 2, o una gramática de tipo 2 pero no de tipo 3, etc, si P, el conjunto de producciones, es:

$$\begin{array}{l} a)\ S ::= aAB,\ A ::= Bb,\ B ::= \lambda \\ b)\ S ::= aA,\ A ::= a,\ A ::= b \\ c)\ S ::= ABa,\ AB ::= a \\ d)\ S ::= ABA,\ A ::= aB,\ B ::= ab \\ e)\ S ::= bA,\ A ::= B,\ B ::= a \end{array}$$

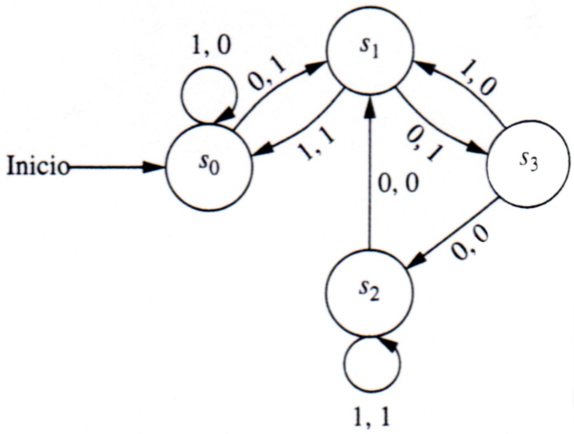
Solución.

a) de tipo 2 pero no de tipo 3.
b) de tipo 3.
c) de tipo 0, pero no de tipo 1.
d) de tipo 2, pero no de tipo 3.
e) de tipo 2.

PROBLEMA 9:
Las tablas de transición y de salida de una máquina de estado finito son las siguientes:

f	*Entrada*		g	*Entrada*	
Estado	0	1	*Estado*	0	1
s_0	s_1	s_0	s_0	1	0
s_1	s_3	s_0	s_1	1	1
s_2	s_1	s_2	s_2	0	1
s_3	s_1	s_2	s_3	0	0

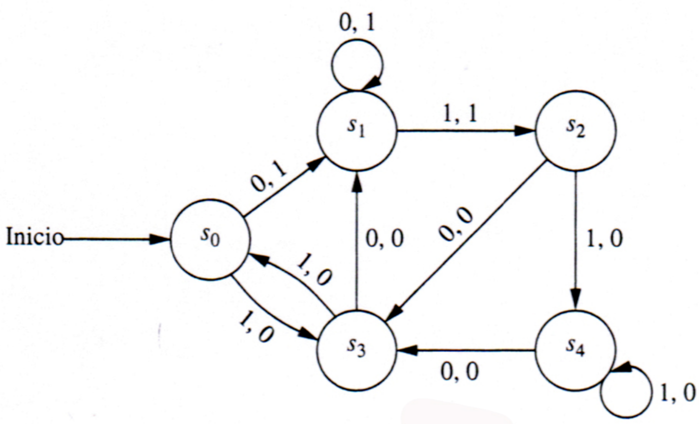
De las que se puede deducir el siguiente diagrama de estados:



Hállese el diagrama de estados para una máquina de estado finito cuyas tablas son:

f	*Entrada*		g	*Entrada*	
Estado	0	1	*Estado*	0	1
s_0	s_1	s_3	s_0	1	0
s_1	s_1	s_2	s_1	1	1
s_2	s_3	s_4	s_2	0	0
s_3	s_1	s_0	s_3	0	0
s_4	s_3	s_4	s_4	0	0

<u>Solución.</u>



PROBLEMA 10:
Hallar la cadena de salida generada por la máquina de estado finito del ejercicio anterior si la cadena de entrada es 101011

Solución.

001000
Los sucesivos estados con sus salidas son:

Entrada	1	0	1	0	1	1	$-$
Estado	s_0	s_3	s_1	s_2	s_3	s_0	s_3
Salida	0	0	1	0	0	0	$-$

PROBLEMA 11:
Calcula los duales de $x(y+0)$ y $\overline{x}\cdot 1+(\overline{y}+z)$.

Solución.

Basta con intercambiar los signos $\cdot$ y $+$, así como los ceros y los unos. Es decir, $x+(y\cdot 1)$ y $(\overline{x}+0)\cdot(\overline{y}\cdot z)$ respectivamente.

PROBLEMA 12:

- Calcula las tablas de valores de las siguiente funciones booleanas:

  a) $F(x,y,z)=x\overline{y}+\overline{(xyz)}$
  b) $F(x,y,z)=x(xy+\overline{yz})$

- Demuestra, usando una tabla, que se cumple la siguiente relación:

  a) $x\oplus y=(x+y)\overline{(xy)}$
  b) $x\oplus y=(x\overline{y})+(\overline{x}y)$

Solución.

a)

x	y	z	$x\overline{y}+\overline{xyz}$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

b)

x	y	z	$x(xy+\overline{yz})$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

Solución.

x	y	$x\oplus y$	$x+y$	xy	$\overline{(xy)}$	$(x+y)\overline{(xy)}$	$x\overline{y}$	$\overline{x}y$	$x\overline{y}+\overline{x}y$
1	1	0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0

a) La tercera columna y la séptima por la izquierda tienen los mismos valores, así que son equivalentes.

b) La tercera columna y la décima por la izquierda tienen los mismos valores, así que son equivalentes.

PROBLEMA 13:
Demuestra la falsedad de estas afirmaciones con un contraejemplo:
a) $x + (y \oplus z) = (x + y) \oplus (x + z)$
b) $x \oplus (y + z) = (x \oplus y) + (x \oplus z)$

<u>SOLUCIÓN.</u>

a) Basta tomar $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, por ejemplo.

b) Basta tomar $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$, por ejemplo.

PROBLEMA 14:
Si por ejemplo tenemos una función como $F(x, y, z) = (x + y)\overline{z}$, podemos calcular su forma normal disyuntiva utilizando las propiedades del álgebra de Boole:

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= (x+y)\overline{z} \\ &= x\overline{z} + y\overline{z} \\ &= x1\overline{z} + 1y\overline{z} \\ &= x(y+\overline{y})\overline{z} + (x+\overline{x})y\overline{z} \\ &= xy\overline{z} + x\overline{y}\overline{z} + xy\overline{z} + \overline{x}y\overline{z} \\ &= xy\overline{z} + x\overline{y}\overline{z} + \overline{x}y\overline{z} \end{aligned}$$

También podemos construir una tabla calculando los vales de F para todos los posibles valores:

x	y	z	$x+y$	$\overline{z}$	$(y+z)\overline{z}$
1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0

La forma normal disyuntiva será la suma booleana de los tres minitérminos correspondientes a las tres filas de la tabla en la que la función vale 1, y que en este caso corresponden a las filas 2, 4 y 6. Es decir $F(x, y, z) = xy\overline{z} + x\overline{y}\overline{z} + \overline{x}y\overline{z}$

Teniendo en cuenta todo esto, hallar la forma normal disyuntiva de:

a) $F(x, y, z) = (x + z)y$

b) $f(x, y, z) = x\overline{y}$

<u>SOLUCIÓN.</u>

a) $F(x, y, z) = xyz + xy\overline{z} + \overline{x}yz$

b) $F(x, y, z) = x\overline{y}z + x\overline{y}\overline{z}$

PROBLEMA 15:
Demuestra con una tabla la siguiente expresión: $x + y = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$

<u>SOLUCIÓN.</u>

x	y	$x + y$	$(x \downarrow y)$	$(x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$
1	1	1	0	1
1	0	1	0	1
0	1	1	0	1
0	0	0	1	0

Como se puede observar la segunda y quinta columna tienen las mismas entradas.